1. MECHANIKA

Mechanika - to idee odnoszące się do zrozumienia i opisu wszelkiego ruchu. Wprowadzone tu pojęcia i wielkości dają postawy innym działom fizyki oraz mechanice technicznej.

Mechanika nie jest jednolitą dziedziną, i tak:

- *Mechanika klasyczna* zawiera idee, które znajdują zastosowanie do opisu zjawisk zachodzących w skali czasu i przestrzeni bliskiej człowiekowi, to znaczy przebiegają w czasie zbliżonym do czasu życia człowieka, w przestrzeni zbliżonej do jego rozmiarów, (czyli co najwyżej kilka rzędów więcej lub mniej).
- *Mechanika kwantowa* zawiera idee przydatne w opisie zjawisk przebiegających w skali bardzo krótkich odcinków czasu, w obrębie bardzo małych rozmiarów.
- *Mechanika relatywistyczna* zawiera idee w obrębie zjawisk w skali dużych szybkości i przyśpieszeń. Przy czym matematyczne idee mechaniki relatywistycznej i mechaniki kwantowej nie są sprzeczne z mechaniką klasyczną - są od niej ogólniejsze.

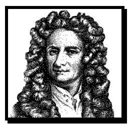
Dydaktyka mechaniki klasycznej sformułowanej przez Newtona wykształciła trzy części: *statykę*, *kinematykę* i *dynamikę*.

- Statyka zajmuje się ciałami pozostającymi w bezruchu, a matematycznie są to równania wynikające z bilansu *sił* i *momentów sił* (rozdział 1.1).
- Kinematyka to opisywanie ruchu oraz wielkościami potrzebnymi do analizy ruchu (rozdział 1.2).
- Dynamika umożliwia opisanie ruchu na bazie znajomości rozkładów sił i momentów sił (rozdział 1.3).

Rys. 1.1. Działy mechaniki.

Rozłączne traktowanie kinematyki i dynamiki ma przyczynę wyłącznie dydaktyczną (stopniowanie trudności), jako że dynamika obejmuje swoim zakresem również kinematykę (rys. 1.1). Matematyka w kinematyce to głównie różniczkowanie (częściowo także całkowanie). Natomiast matematyka w dynamice – to przede wszystkim całkowanie oraz określanie stałych całkowania na podstawie warunków brzegowych (rozdział 1.3).

NEWTON Isaac (1643-1727



W rozdziale *Mechanika* rozważany jest jeden rodzaj *ciała fizycznego – bryła sztywna*. Mechanika innych ciał – jak: materiały plastyczne, przedmioty elastyczne, płyny ściśliwe i nieściśliwe, ciecze lepkie, a także media specjalne (np ciekłe kryształy, ferrosmary) – może być rozważana dopiero po zapoznaniu się z mechaniką bryły sztywnej (niniejszy podręcznik tych zagadnień nie uwzględnia).

1.1. Statyka

Statyka zajmuje się analizą warunków, przy jakich ciała pozostają w bezruchu. Chodzi o bilans sił i momentów sił:

1/ Suma zewnętrznych sił działających w kierunku środka masy ciała wynosi zero (1.1.1).

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \tag{1.1.1}$$

2/ Suma zewnętrznych momentów sił działających na ciało wynosi zero (1.1.2).

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \qquad (1.1.2)$$

Reguła 1.1.1 oraz reguła 1.1.2 dostarczają równań, których rozwiązanie zawiera informacje o warunkach pozostawania ciała (czy układu ciał) w stanie statycznym (w bezruchu).

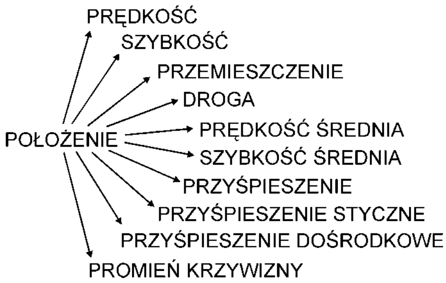
1.2. Kinematyka

Podstawowym zagadnieniem w kinematyce jest identyfikacja *położenia*. W przypadku ruchu postępowego jest to wektor wskazujący położenie punktu (np. *środka masy*) w przestrzeni (rozdział 1.2.1.1), natomiast w ruchu obrotowym jest to kąt obrotu bryły (rozdział 1.2.2).

Z *położenia można wyznaczyć szereg wielkości, np.: prędkość, szybkość, przemieszczenie, drogę, przyśpieszenie, szybkość średnią, prędkość średnią* itd.

1.2.1. *Kinematyka w ruchu postępowym*

Dział *kinematyka w ruchu postępowym* uczy umiejętności wyznaczania wielkości kinematycznych z uprzednio zidentyfikowanego położenia (diagram na rys.1.2.1.1).



Rys. 1.2.1.1. Wielkości kinematyczne.

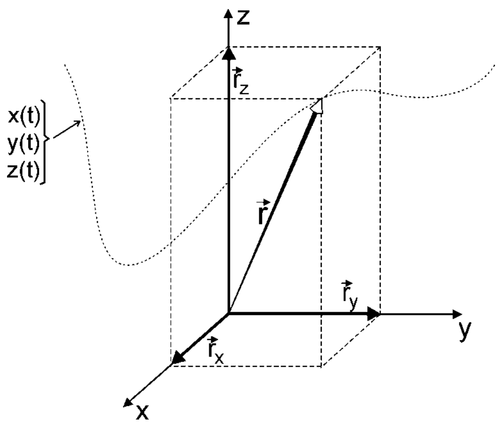
1.2.1.1. Położenie

Położenie $\vec{r}(t)$ to wektorowa funkcja czasu, opisująca ruch punktu w przestrzeni. Początek *położenia* znajduje się w początku układu współrzędnych, koniec *położenia* (strzałka) wskazuje miejsce, gdzie w danym momencie znajduje się punkt (rys. 3). Położenie $\vec{r}(t)$ można rozłożyć na składowe $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ i $\vec{r}_z$. Każda z tych składowych daje się przedstawić jako *współrzędna* (x(t), y(t) lub z(t)) pomnożona przez właściwy *wersor* (*i* – wzdłuż osi x, *j* – wzdłuż osi y, *k* – wzdłuż osi z):

$$\vec{r}_x = x(t)\ i\ ; \quad \vec{r}_y = y(t)\ j\ ; \quad \vec{r}_z = z(t)\ k$$

Z tego względu *położenie* $\vec{r}(t)$ zapisuje się w postaci sumy poszczególnych składowych:

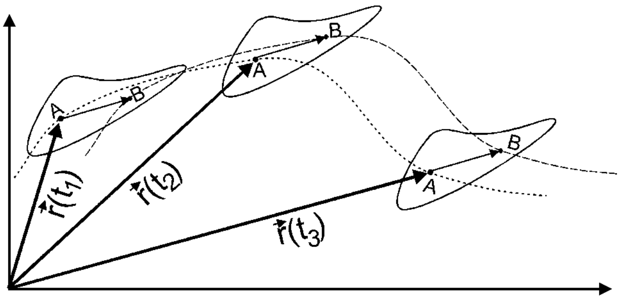
$$\vec{r}(t) = x(t)\ i + y(t)\ j + z(t)\ k \qquad (1.2.1.1.1)$$



Rys. 1.2.1.1.1. Położenie.

Współrzędne *x(t), y(t), z(t)* (trzy funkcje czasu) - z matematycznego punktu widzenia - stanowią układ równań parametrycznych opisujący kształt krzywej – *tor* ruchu punktu.

Położenie, chociaż opisuje ruch obiektu idealnego – czyli tzw. *punktu materialnego*, nadaje się także do opisu *ruchu translacyjnego* bryły sztywnej. Ruch translacyjny występuje wtedy, gdy wszystkie punkty bryły poruszają się po takich samych, równoległych torach (rys. *1.2.1.1.*2).

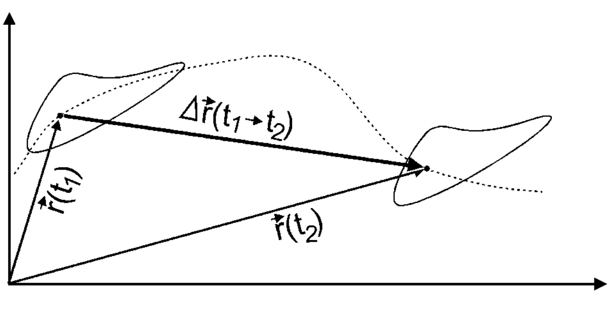


Rys. 1.2.1.1.2. Ruch translacyjny.

1.2.1.2. Przemieszczenie

Przemieszczenie $\Delta\vec{r}(t_1 \rightarrow t_2)$ - wektor, którego początek dotyka miejsca, gdzie punkt znajduje się w momencie t_1, a koniec – w miejscu - gdzie punkt znajduje się w momencie t_2. Wektor ów, to różnica *położenia* końcowego i *położenia* początkowego (rys. 1.2.1.2.1).

$$\Delta\vec{r}(t_1 \rightarrow t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \qquad (1.2.1.2.1)$$



Rys. 1.2.1.2.1. Przemieszczenie.

1.2.1.3. Prędkość średnia

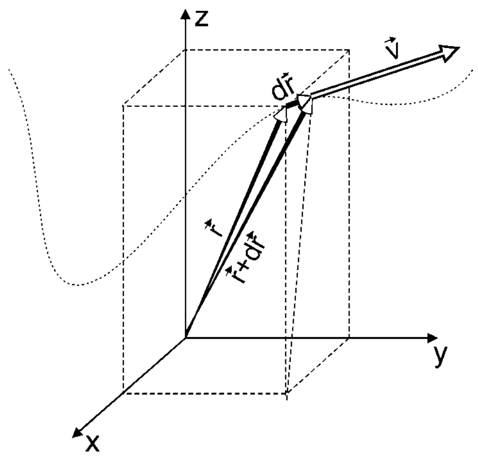
Prędkość średnia $\vec{v}_{śr}(t_1 \to t_2)$ w czasie od t_1 do t_2 to *przemieszczenie* w czasie od t_1 do t_2 przez czas owego przemieszczania.

$$\vec{v}_{śr}(t_1 \to t_2) = \frac{\Delta\vec{r}(t_1 \to t_2)}{t_2 - t_1} \tag{1.2.1.3.1}$$

1.2.1.4. Prędkość

Prędkość (angielskie '*velocity*') $\vec{v}(t)$ jest wektorową funkcją czasu określającą szybkość zmiany *położenia*, czyli pochodna położenia względem czasu.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{1.2.1.4.1}$$



Rys. 1.2.1.4.1. Prędkość.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k]}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}i + \frac{dy(t)}{dt}j + \frac{dz(t)}{dt}k = \\ = v_x(t)\,i + v_y(t)j + v_z(t)\,k \tag{1.2.1.4.2}$$

Z definicji *prędkości* wynika, że jej kierunek i zwrot są takie same jak kierunek i zwrot elementarnego przemieszczenia $d\vec{r}$. Zatem *prędkość* jest wektorem w każdej chwili stycznym do *toru ruchu*.

1.2.1.5. Szybkość

Szybkość v(t) (angielskie '*speed*') jest modułem *prędkości*:

$$v(t) = |\vec{v}| \qquad (1.2.1.5.1)$$

Ponadto, w wypadku gdy znana jest funkcja *drogi* s(t) w zależności od czasu, *szybkość* może być wyliczona z pochodnej *drogi*.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad (1.2.1.5.2)$$

Szybkość w języku angielskim określa słowo ***speed***, natomiast **prędkość** – ***velocity***.

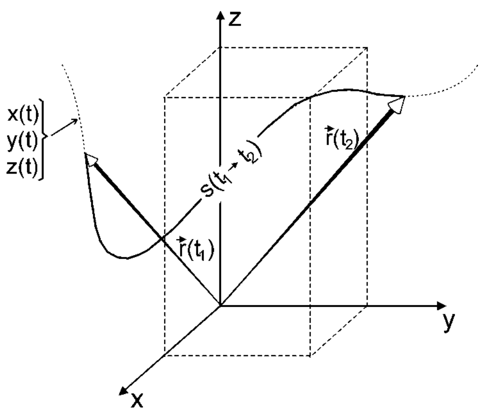
Operacyjna definicja *szybkości* przyjmuje postać:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \qquad (1.2.1.5.3)$$

1.2.1.6. Droga

Droga to długość *toru*, po jakim punkt porusza się w określonym czasie. W czasie od momentu t_1 do momentu t_2 punkt przebywa drogę równą całce z szybkości względem czasu w granicach od t_1 do t_2.

$$s(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (1.2.1.6.1)$$



Rys. 1.2.1.6.1. Droga.

W matematyce istnieje pojęcie *hodograf*, które określa geometryczne miejsce końców wektorów funkcji wektorowej, odmierzonych z jednego nieruchomego punktu w przestrzeni (np. z początku współrzędnych). Zatem *droga* to *hodograf* położenia. Zagadnienie *drogi* warto także porównać z zagadnieniem *długości łuku krzywej* w matematyce.

1.2.1.7. Szybkość średnia

Szybkość średnia $v_{śr}$ w czasie od t_1 do t_2 to *droga* przez czas, w jakim została przebyta.

$$v_{śr}(t_1 \to t_2) = \frac{s(t_1 \to t_2)}{t_2 - t_1} \qquad (1.2.1.7.1)$$

1.2.1.8. Przyśpieszenie

Przyśpieszenie $\vec{a}(t)$ – szybkość zmiany *prędkości* (po angielsku: ‘*The acceleration vector is the rate of change of the velocity*’).

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{1.2.1.8.1}$$

1.2.1.9. Przyśpieszenie styczne

Uwaga! Najpierw definicja modułu *przyśpieszenia stycznego* $a_s(t)$, czyli szybkości (szybkość to angielskie ‘*rate*’) zmiany *szybkości* v(t) (w tym przypadku szybkość to angielskie ‘*speed*’; ‘*The acceleration is the rate of change of the speed*’):

$$a_s(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{1.2.1.9.1}$$

Wersor *przyśpieszenia stycznego* jest tożsamy z wersorem *prędkości*(ponieważ wektor *przyśpieszenia stycznego* jest równoległy do *wektora prędkości*), zatem *przyśpieszenie styczne* można wyrazić następująco:

$$\vec{a}_s(t) = \frac{dv(t)}{dt}\frac{\vec{v}}{v} \tag{1.2.1.9.2}$$

1.2.1.10. Przyśpieszenie dośrodkowe

Przyśpieszenie dośrodkowe $\vec{a}_d(t)$ jest prostopadłe do *toru ruchu*. Suma *przyspieszenia stycznego* i *przyspieszenia dośrodkowego* to *przyspieszenie* (wypadkowe). Z tego względu *przyspieszenie dośrodkowe* określa następująca zależność:

$$\vec{a}_d(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_s(t) \tag{1.2.1.10.1}$$

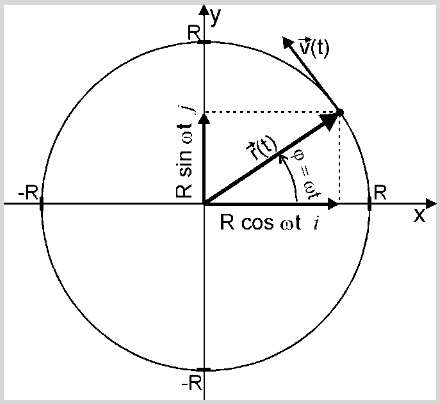
1.2.1.11. Promień krzywizny

Wyrażenie na *promień krzywizny* zostało ustalone w oparciu o doświadczenie nabyte podczas rozważania ruchu po okręgu.

Teoria ruchu po okręgu

Położenie w ruchu po okręgu wyraża się następująco:

$$\vec{r}(t) = R\cos\omega t\; i + R\sin\omega t\; j \tag{1.2.1.11.1}$$



Rys. 1.8. Ruch po okręgu.

Prędkość – pochodna położenia - w ruchu po okręgu przyjmuje postać:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -R\omega\sin\omega t\;\; i + R\omega\cos\omega t\;\; j \tag{1.2.1.11.2}$$

Natomiast przyśpieszenie – pochodna prędkości – wyraża się następująco:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\;\; i + R\omega^2\sin\omega t\;\; j = -\,\vec{r}(t)\;\omega^2 \tag{1.2.1.11.3}$$

Zatem przyśpieszenie ma kierunek taki sam co położenie, ale przeciwny zwrot, i jest skierowane w kierunku do środka okręgu. Gdyby nie był to ruch jednostajny, przyspieszenie miałoby inny kierunek.

W ruchu po okręgu prędkość jest prostopadła do położenia, co można łatwo sprawdzić obliczając iloczyn skalarny tych wektorów, i przekonując się, że wynosi on zero.

W ruchu jednostajnym po okręgu położenie jest tożsame z promieniem krzywizny. Posługując się modułami promienia krzywizny, prędkości i przyśpieszenia można sformułować następujący związek:

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \tag{1.2.1.11.4}$$

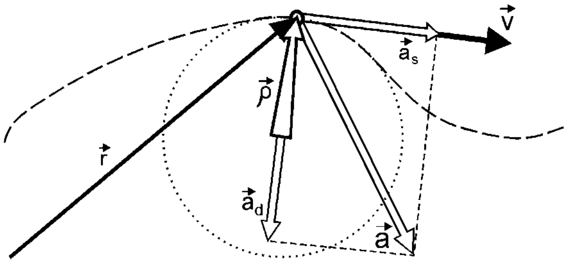
Uogólniając wyrażenie (1.2.1.11.4) na dowolny ruch krzywoliniowy otrzymuje się:

$$a = \rho\omega^2 = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a} \tag{1.2.1.11.5}$$

Uwzględniając fakt, że wersor *promienia krzywizny* ma zwrot przeciwny do zwrotu wersora *przyśpieszenia*, otrzymujemy:

$$\vec{\rho}(t) = \frac{v^2}{a_d}\left(-\frac{\vec{a}_d}{a_d}\right) \tag{1.2.1.11.6}$$

Przykład konfiguracji przestrzennej *położenia*, *przyśpieszeń*, *prędkości* i *promienia krzywizny* w ruchu krzywoliniowym przedstawiony jest na rys. 1.2.1.11.2.



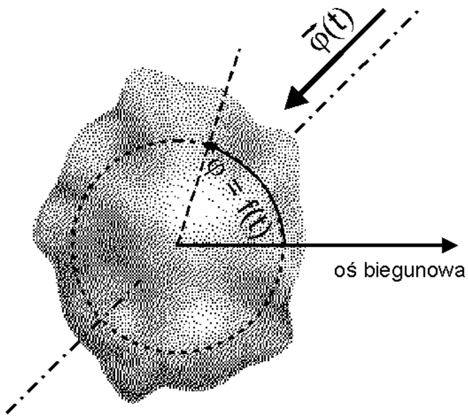
Rys. 1.2.1.11.2. Położenie $\vec{r}$, przyśpieszenia: $\vec{a}, \vec{a}_d, \vec{a}_s$, prędkość $\vec{v}$, promień krzywizny $\vec{\rho}$.

1.2.2. Kinematyka w ruchu obrotowym

Ruch obrotowy opisywany jest w układzie współrzędnych biegunowych. W układzie tym wszystkie punkty obracającej się bryły poruszają się z tą samą *prędkością kątową*, tak jak w ruchu postępowym wszystkie punkty poruszają się z tą samą *prędkością* (liniową). W niniejszym rozdziale ograniczono się do ruchu obrotowego wokół nieruchomej osi.

1.2.2.1. Położenie kątowe

Położenie kątowe $\vec{\varphi}(t)$ jest wektorem o wartości równej kątowi, o jaki obróciła się bryła względem osi biegunowej (rys. 1.2.2.1.1). Kierunek tego wektora jest taki sam jak oś obrotu, natomiast zwrot wyznacza się zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Rys. 1.2.2.1.1. Położenie kątowe.

1.2.2.2. Prędkość kątowa

Prędkość kątowa $\vec{\omega}(t)$ jest szybkością zmian *położenia kątowego* (wyrażenie 1.2.2.2.1).

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.2.2.2.1)$$

1.2.2.3. Przyśpieszenie kątowe

Przyśpieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}(t)$ jest szybkością zmian *prędkości kątowej* (wyrażenie 1.2.2.3.1).

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.2.2.3.1)$$

Przykład w zakresie kinematyki ruchu postępowego

Dane jest położenie $\vec{v}(t) = A\,t^2\,i + B\cos(C\,t + D)\,j + E\,e^{F\,t}\,k$

gdzie A, B, D i E – stałe.
Wyznaczyć prędkość, przyśpieszenie i prędkość średnią w czasie od t_1 do t_2.

Rozwiązanie:

Definicja prędkości: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(A\,t^2\,i + B\cos(C\,t + D)\,j + E\,e^{F\,t}\,k) =$$
$$= 2A\,i - BC\sin(Ct + D)\,j + EF\,e^{F\,t}\,k$$

Definicja przyspieszenia: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(2A\,i - BC\sin(Ct + D)\,j + EF\,e^{F\,t}\,k) =$$
$$= 2\,i - BC^2\cos(Ct + D)\,j + EF^2\,e^{F\,t}\,k$$

Definicja prędkości średniej: $\vec{v}_{śr}(t_1 \to t_2) = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$

$$\vec{v}_{śr}(t_1 \to t_2) = \frac{A\,t_2^{\,2}\,i + B\cos(C\,t_2 + D)\,j + E\,e^{F\,t_2}\,k}{t_2 - t_1} -$$
$$- \frac{A\,t_1^{\,2}\,i + B\cos(C\,t_1 + D)\,j + E\,e^{F\,t_1}\,k}{t_2 - t_1} =$$
$$= \frac{A\,(t_2^{\,2} - t_2^{\,2})}{t_2 - t_1}\,i + \frac{B\,(\cos(Ct_2 + D) - \cos(Ct_1 + D))}{t_2 - t_1}\,j + \frac{E\,(e^{F\,t_2} - e^{F\,t_1})}{t_2 - t_1}\,k$$

1.3. Dynamika

1.3.1. Dynamika w ruchu postępowym

W dynamice stosuje jest zasadę Newtona wyrażającą pogląd, że ciało o masie *m* porusza się z przyśpieszeniem $\vec{a}$ proporcjonalnym do przyłożonej siły $\vec{F}$, a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy. Jest to treść tzw. II zasady dynamiki Newtona. W zasadzie tej mieści się także I zasada dynamiki Newtona, ponieważ – jak łatwo zauważyć – gdy $\vec{F}$=0 wówczas $\vec{a}$=0, czyli ciało porusza się cały czas z prędkością początkową. Matematycznie wspomniana II zasada jest zapisywana następująco:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) \tag{1.3.1}$$

Biorąc pod uwagę powyższą zasadę newtonowskiej dynamiki oraz definicję przyśpieszenia otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(t) \quad \Rightarrow \quad d\vec{v}(t) = \frac{1}{m}\ \vec{F}(t)\ dt \tag{1.3.2}$$

Przedtem obowiązywała tzw. mechanika arystotelesowska, w jakiej zakładano, że ciało porusza się tylko wówczas, gdy przyłożona jest do niego siła. System Arystotelesa nie był zmatematyzowany – stosowano w nim klasyczną spekulację logiczną.

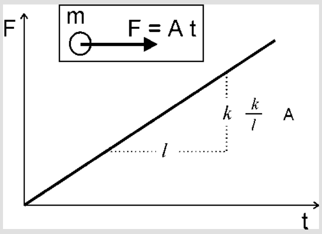
Arystoteles (384-322 p.n.e)

W rezultacie obustronnego scałkowania równania (1.3.2) otrzymujemy wyrażenie na prędkość (przykład poniżej).

Przykład 1 w zakresie dynamiki w ruchu postępowym

Na masę *m* działa siła F = A t, gdzie A jest stałą. Wyznaczyć zależność prędkości od czasu jeżeli prędkość początkowa wynosi v_o.

Rozwiązanie:



$$dv(t) = \frac{1}{m} \; A\,t \;\; dt$$

po obustronnym scałkowaniu

$$v(t) + C_1 = \frac{1}{m} \; \frac{1}{2} A\,t^2 + C_2$$

podstawiając $C = C_2 - C_1$ otrzymujemy:

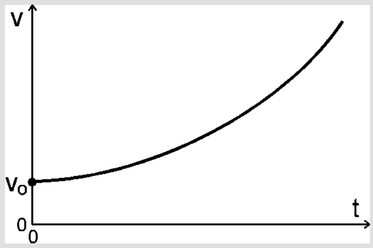
$$v(t) = \frac{1}{m} \; \frac{1}{2} A\,t^2 + C$$

W chwili początkowej $v = v_o$, zatem

$$v(t=0) = \frac{1}{m} \; \frac{1}{2} A\,0^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = v_o$$

i wyrażenie na szybkość przyjmuje postać funkcji:

$$\underline{v(t) = \frac{1}{m} \; \frac{1}{2} A\,t^2 + v_o}$$



Powyższe rozwiązanie jest okazją do przypomnienia ogólnej zasady odnośnie geometrycznej interpretacji funkcji i równania. Mianowicie: linia na wykresie odnosi się do funkcji, natomiast punkt na tej linii – do równania. **W fizyce wszystkie wyrażenia są funkcjami lub równaniami.** Wzory wprowadza się dopiero w inżynierii poszczególnych dziedzin technicznych i przyrodniczych.

Po wyznaczeniu $\vec{v}(t)$ można ustalić położenie $\vec{r}(t)$ pod warunkiem, że znane jest położenie początkowe $\vec{r}(t=0) \equiv \vec{r}_o$. Jesteśmy w stanie to uczynić korzystając z definicji prędkości, z której wynika:

$$d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \;\; dt \tag{1.3.3}$$

Przykład 2 w zakresie dynamiki w ruchu postępowym

Na masę *m* działa siła F = A t, gdzie A jest stałą. Wyznaczyć zależność położenia od czasu jeżeli prędkość początkowa wynosi v_o a współrzędna początkowa x_o.

Rozwiązanie:

Najpierw wyznaczamy prędkość tak jak w zadaniu 1.1.

$$v(t) = \tfrac{1}{m}\ \tfrac{1}{2} A\, t^2 + v_o$$

Następnie adaptujemy definicję prędkości do warunków zadania, tzn. położenie zastępujemy współrzędną, ponieważ mamy do czynienia z ruchem jednowymiarowym – wystarczy posługiwać się współrzędną usytuowaną wzdłuż kierunku ruchu.

$$dx = v(t)\ dt$$

$$dx = (\tfrac{1}{m}\ \tfrac{1}{2} A\, t^2 + v_o)\ dt$$

Po obustronnym scałkowaniu:

$$x = \tfrac{1}{m}\ \tfrac{1}{6} A\, t^3 + v_o\ t + C$$

$$x_o = \tfrac{1}{m}\ \tfrac{1}{6} A\, 0^3 + v_o\ 0 + C$$

$$C = x_o$$

$$\underline{x\,(t) = \tfrac{1}{m}\ \tfrac{1}{6} A\, t^3 + v_o\ t + x_o}$$

Przykład 3 w zakresie dynamiki w ruchu postępowym

Do masy *10 g* przyłożono siłę $\vec{F} = 30\, e^{2t}\ i + 20\sin(3t)\ j + 50\, t^2\ k$

Wyznaczyć położenie, jeżeli $\vec{v}_o = 2\, i + 3\, j - 2\, k$ $\vec{r}_o = 2\, i + 3\, j - 2\, k$

Rozwiązanie.:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} = 3\, e^{2t}\ i + 2\sin(3t)\ j + 5\, t^2\ k$$

$$\vec{v} = \int (3\, e^{2t}\ i + 2\sin(3t+1)\ j + 5\, t^2\ k)\ dt$$

$$\vec{v} = (\tfrac{3}{2} e^{2t} + A)\, i + [-\tfrac{2}{3}\cos(3t) + B]\, j + [\tfrac{5}{3} t^3 + C]\, k$$

$$2 = \tfrac{3}{2} + A \qquad 3 = -\tfrac{2}{3} + B \qquad -2 = C$$

$$A = \tfrac{1}{2} \qquad B = 2\tfrac{1}{3} \qquad C = -2$$

$$\vec{v} = (\tfrac{3}{2} e^{2t} + \tfrac{1}{2})\, i + [-\tfrac{2}{3}\cos(3t) + 2\tfrac{1}{3}]\, j + [\tfrac{5}{3} t^3 - 2]\, k$$

$$\vec{r} = \int \{(\tfrac{3}{2} e^{2t} + \tfrac{1}{2})\, i + [-\tfrac{2}{3}\cos(3t) + 2\tfrac{1}{3}]\, j + [\tfrac{5}{3} t^3 - 2]\, k\}\ dt$$

$$\vec{r} = (\tfrac{3}{4} e^{2t} + \tfrac{1}{2} t + D)\, i + [-\tfrac{2}{9}\sin(3t) + 2\tfrac{1}{3} t + E]\, j + [\tfrac{5}{12} t^4 - 2t + F]\, k$$

$$2 = \tfrac{3}{4} + D \qquad 3 = E \qquad -2 = F$$

$$\underline{\vec{r} = (\tfrac{3}{4} e^{2t} + \tfrac{1}{2} t + 1\tfrac{1}{4})\, i + [-\tfrac{2}{9}\sin(3t) + 2\tfrac{1}{3} t + 3]\, j + [\tfrac{5}{12} t^4 - 2t - 2]\, k}$$

1.3.2.1. Zasada zachowania pędu

Zasada zachowania pędu jest inną formą newtonowskiej zasady dynamiki. Do stwierdzenia tego prowadzi następujące rozumowanie polegające na przekształcaniu zasady dynamiki:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.2)$$

$$m\, d\vec{v}(t) = \vec{F}(t)\, dt \quad (1.3.2.1.3)$$

Iloczyn masy i elementarnej zmiany prędkości określono jako elementarną zmianę pędu.

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}(t)\, dt \quad (1.3.2.1.4)$$

Powyższy zapis odczytuje się tak: elementarna zmiana pędu jest równa iloczynowi siły i elementarnemu czasowi działania tej siły. Zapis 1.3.2.1.4 można sprowadzić do formy 1.3.2.1.5:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.5)$$

Powyższe równanie odczytuje się w sposób następujący: *szybkość zmiany pędu ciała lub układu ciał jest równa wypadkowej sile zewnętrznej*. Jeżeli wypadkowa siła zewnętrzna jest równa zeru, czyli prawa strona w równaniu (1.3.2.1.5) równa jest zeru, wtedy pęd nie zmienia się (ponieważ różniczkowana wielkość musi być wielkością stałą, skoro pochodna wynosi zero) – co stanowi treść zasady zachowania pędu.

1.3.2. Dynamika w ruchu obrotowym

Newtonowska zasada dynamiki w odniesieniu do ruchu obrotowego przyjmuje następującą postać:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{1}{I}\vec{M}(t) \quad (1.3.2.1)$$

gdzie: $\vec{\varepsilon}(t)$ = przyśpieszenie kątowe, I = moment bezwładności, $\vec{M}(t)$ = moment siły

Przyśpieszenie kątowe, moment bezwładności i moment siły dotyczą tej samej osi obrotu.

1.3.2.1. Zasada zachowania momentu pędu

Zasada zachowania momentu pędu to konsekwencja przekształcenia zasady dynamiki (1.3.2.1) w ruchu obrotowym:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{I}\vec{M}(t) \quad (1.3.2.2)$$

$$I\, d\vec{\omega} = \vec{M}(t)\, dt \quad (1.3.2.3)$$

Iloczyn momentu bezwładności i elementarnej zmiany prędkości kątowej stanowi elementarną zmianę momentu pędu.

$$d\vec{L} = \vec{M}(t)\, dt \quad (1.3.2.4)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(t) \quad (1.3.2.5)$$

Z równania (1.3.2.5) wyprowadza się wniosek analogiczny jak w przypadku zasady zachowania pędu, mianowicie: z faktu $\vec{M}(t) = 0$ wynika, że $\vec{L}$ = const – co stanowi treść zasady zachowania momentu pędu. Warto zauważyć, że każde wirujące ciało (wirujące – czyli obdarzone momentem pędu) musi zmieniać swój moment pędu w kierunku przyłożonego zewnętrznego momentu siły. Np. zabawka-bąk po wpływem momentu siły ciężkości nie przewraca się, lecz koniec wektora momentu pędu w każdej chwili przemieszcza się w kierunku momentu siły ciężkości. W efekcie, koniec ów zakreśla okrąg, a cały wektor momentu pędu – powierzchnię boczną odwróconego do góry stożka. Efekt zmiany kierunku wektora momentu pędu pod wpływem zewnętrznego momentu siły zwane jest *precesją*.

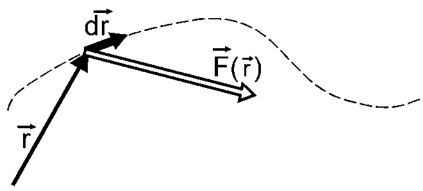
1.4. Praca

Pojęcie pracy występuje we wszystkich działach fizyki i przyjmuje różne formy. W każdym przypadku jest to adaptacja ogólnej definicji pracy (rozdział 1.4.1).

1.4.1. Ogólna definicja pracy

Praca wykonana przez siłę podczas elementarnego przemieszczenia – to iloczyn skalarny siły $\vec{F}(\vec{r})$ oraz elementarnego przemieszczenia $d\vec{r}$.

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (1.4.1.1)$$



Rys. 1.4.1.1. Graficzny komentarz do definicji pracy.

Adaptacja ogólnej definicji pracy do szczególnych przypadków czyni ją zwykle prostszą. Na przykład, jeżeli siła działa stale w tym samym kierunku i przemieszczenie odbywa się również w tym kierunku, wówczas:

$$dW = F(x)\, dx \qquad (1.4.1.2)$$

gdzie x oznacza współrzędną usytuowaną w kierunku działania siły.

1.4.2. Praca w ruchu obrotowym

Praca wykonana przez moment siły podczas elementarnego przemieszczenia kątowego – to iloczyn skalarny momentu siły i elementarnego przemieszczenia kątowego.

$$dW = M(\varphi) \cdot d\varphi \qquad (1.4.2.1)$$

Należy pamiętać, że jednostką φ jest *radian*, który - z kolei - zgodnie z definicją miary kąta jest wyrażony jako m/m (metr na metr).

1.4.3. Praca prądu elektrycznego

Definicja pracy w odniesieniu do pracy wykonywanej przez przemieszczającą ładunki siłę pola elektrycznego przyjmuje postać:

$$dW = u(t)\, i(t)\, dt \qquad (1.4.3.1)$$

gdzie: u(t) = napięcie elektryczne; i(t) = natężenie prądu elektrycznego.

Rozwinięcie zagadnienia znajduje się w rozdz. 6.

1.4.4. Praca gazu

Gaz rozprężając się wykonuje pracę. Elementarna praca wykonana przez gaz podczas elementarnej zmiany jego objętości wyraża się następująco:

$$dW = p(V)\ \ dV \qquad (1.4.4.1)$$

gdzie: p(V) to zależność ciśnienia od objętości; dV - elementarna zmiana objętości.